数学 I

ある学校では，ドミソシの 4 つの音を 4 つ組み合せてチャイムを作り，授業の開始･終了などを知らせるために鳴らしている．チャイムは，図 1 のように 4×4 の格子状に並んだ 16 個のボタンを押すことによって作ることができる．縦方向は音の種類を表し，横方向は時間を表している．例えば，ドミソシという音を 1 つずつ，順番に鳴らすチャイムを作るには，図 2 のようにボタンを押せばよい (押したボタンを◎で表している).

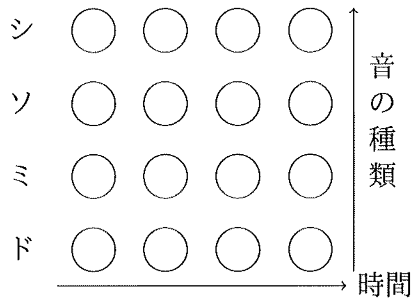


図 1

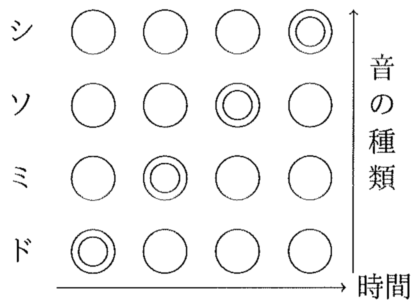


図 2

ただし，鳴らすことのできる音の数は縦 1 列あたり 1 つだけであり，音を鳴らさない無音は許されず，それぞれの列で必ず 1 つの音を選ばなければならないとする．

このとき

(1) 4 つの音を 1 回ずつ鳴らすことを考えた場合，チャイムの種類は $\boxed{(1)}\boxed{(2)}\boxed{(3)}$ 通りになる．

(2) (1) に加えて，同じ音を連続して 2 回繰り返すことを 1 度だけしてもかまわない (例：ドミミソ) とした場合，チャイムの種類は合わせて $\boxed{(4)}\boxed{(5)}\boxed{(6)}$ 通りになる．ただし，連続する音以外は高々 1 回までしか鳴らすことはできず，それらは連続する音とは異ならなければならないものとする．

(3) (1) と (2) に加えて，同じ音を連続して 4 回繰り返すチャイムを許すと，可能なチャイムの種類は合わせて $\boxed{(7)}\boxed{(8)}\boxed{(9)}$ 通りになる．

数学 II

$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，関数 $y = \sin 3\theta - 3\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$ の最大値と最小値をもとめたい．

(1) $x = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とおくと，もとの関数は

$$y = \boxed{(10)}\boxed{(11)}\,x^3 + \boxed{(12)}\boxed{(13)}\,x^2 + \boxed{(14)}\boxed{(15)}\,x + \boxed{(16)}\boxed{(17)}$$

と書きなおすことができる．

(2) このことから，もとの関数の最大値は $\theta = \dfrac{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}\pi$ のときに $\boxed{(22)}\boxed{(23)}\sqrt{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}$ であり，最小値は $\theta = \dfrac{\boxed{(26)}\boxed{(27)}}{\boxed{(28)}\boxed{(29)}}\pi$ のときに $\boxed{(30)}\boxed{(31)}\sqrt{\boxed{(32)}\boxed{(33)}}$ であることがわかる．

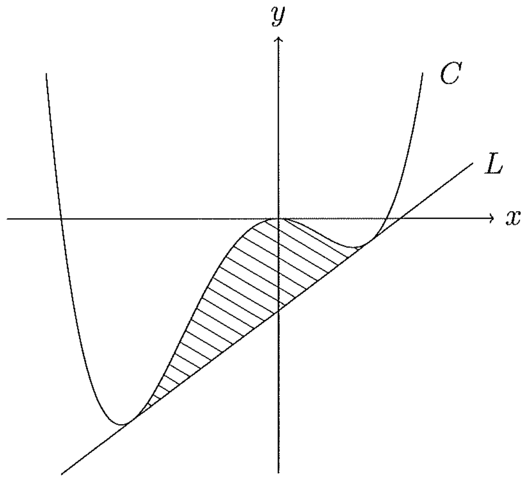
数学 III

xy 平面上の曲線 C を $y = x^2(x-1)(x+2)$ とする.

(1) C に 2 点で下から接する直線 L の方程式は

$$y = \frac{\boxed{(34)}\boxed{(35)}\boxed{(36)}}{\boxed{(37)}\boxed{(38)}\boxed{(39)}}x + \frac{\boxed{(40)}\boxed{(41)}\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}\boxed{(44)}\boxed{(45)}}$$

である.



(2) C と L が囲む図の斜線部分の面積は

$$\frac{\boxed{(46)}\boxed{(47)}\boxed{(48)}\sqrt{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}}}{\boxed{(52)}\boxed{(53)}\boxed{(54)}}$$

となる.

ただし，次の公式を使ってもかまわない (m, n は正の整数).

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \, dx = \frac{(-1)^n \, m! \, n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

環

数学 IV

(1) xyz 空間において

$$|x|+|y|+|z| \leqq 1$$

を満たす立体の体積は $\dfrac{\boxed{(55)}\boxed{(56)}}{\boxed{(57)}\boxed{(58)}}$ である．

(2) a を実数としたとき，xyz 空間において

$$|x-a|+|y-a|+|z| \leqq 1, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad z \geqq 0$$

を満たす立体の体積 $V(a)$ は

(a) $a < \dfrac{\boxed{(59)}\boxed{(60)}}{\boxed{(61)}\boxed{(62)}}$ のとき，$V(a)=0$,

(b) $\dfrac{\boxed{(59)}\boxed{(60)}}{\boxed{(61)}\boxed{(62)}} \leqq a < 0$ のとき，$V(a)=\dfrac{\boxed{(63)}\boxed{(64)}\,a^3+\boxed{(65)}\boxed{(66)}\,a^2+\boxed{(67)}\boxed{(68)}\,a+\boxed{(69)}\boxed{(70)}}{\boxed{(71)}\boxed{(72)}}$,

(c) $0 \leqq a < \dfrac{\boxed{(73)}\boxed{(74)}}{\boxed{(75)}\boxed{(76)}}$ のとき，$V(a)=\dfrac{\boxed{(77)}\boxed{(78)}\,a^3+\boxed{(79)}\boxed{(80)}\,a+\boxed{(81)}\boxed{(82)}}{\boxed{(83)}\boxed{(84)}}$,

(d) $\dfrac{\boxed{(73)}\boxed{(74)}}{\boxed{(75)}\boxed{(76)}} \leqq a < \boxed{(85)}\boxed{(86)}$ のとき，$V(a)=\dfrac{\boxed{(87)}\boxed{(88)}\,a^3+\boxed{(89)}\boxed{(90)}\,a^2+\boxed{(91)}\boxed{(92)}\,a}{\boxed{(93)}\boxed{(94)}}$,

(e) $\boxed{(85)}\boxed{(86)} \leqq a$ のとき，$V(a)=\dfrac{\boxed{(95)}\boxed{(96)}}{\boxed{(97)}\boxed{(98)}}$

となる．

数学 V

複数人でジャンケンを何回か行い勝ち残った1人を決めることを考える．

最初は全員がジャンケンに参加して始める．それぞれのジャンケンでは，そのジャンケンの参加者がそれぞれグー，チョキ，パーのどれかを出し，もしだれか1人が他の全員に勝った場合にはその1人が勝者となりジャンケンはそこで終了する．そうでない場合，全員が同じ手を出したか，グー，チョキ，パーのそれぞれを誰かが出した場合には‘あいこ’となり，そのジャンケンの参加者全員が次のジャンケンに進む．上記以外で，2つの手に分かれた場合には，負けた手を出した人を除いて勝った手を出した人だけが次のジャンケンに進む．このように，ジャンケンを繰り返し行い，1人の勝者が決まるまで続けるものとする．

ただし，ジャンケンの参加者全員，グー，チョキ，パーのどれかを等しい確率で毎回ランダムに出すものとする．また，通常のジャンケンのように，グーはチョキに勝ち，チョキはパーに勝ち，パーはグーに勝つものとする．

(1) 3人でジャンケンを複数回行い1人の勝者を決める場合，1回目のジャンケンで勝者が決まる確率は $\dfrac{\boxed{(99)}\boxed{(100)}}{\boxed{(101)}\boxed{(102)}}$ であり，ちょうど2回のジャンケンで勝者が決まる確率は $\dfrac{\boxed{(103)}\boxed{(104)}}{\boxed{(105)}\boxed{(106)}}$ であり，ちょうど3回のジャンケンで勝者が決まる確率は $\dfrac{\boxed{(107)}\boxed{(108)}}{\boxed{(109)}\boxed{(110)}}$ である．

(2) 4人でジャンケンを複数回行い1人の勝者を決める場合，1回目のジャンケンで勝者が決まる確率は $\dfrac{\boxed{(111)}\boxed{(112)}\boxed{(113)}}{\boxed{(114)}\boxed{(115)}\boxed{(116)}}$ であり，ちょうど2回のジャンケンで勝者が決まる確率は $\dfrac{\boxed{(117)}\boxed{(118)}\boxed{(119)}}{\boxed{(120)}\boxed{(121)}\boxed{(122)}}$ である．

数学 VI

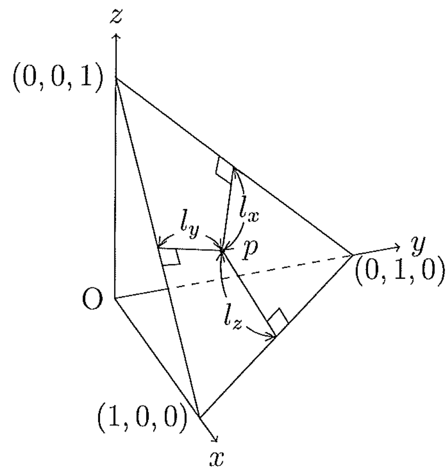
ある大学で来学期の授業の形式をどうするかを検討している．授業形式の選択としては，通常の対面形式 (授業形式 u と呼ぶことにする)，Web 上で資料を閲覧できたり課題を行ったりできるオンデマンド形式 (授業形式 v と呼ぶことにする)，Web 会議システムを使用するオンライン配信形式 (授業形式 w と呼ぶことにする) の 3 つがあるとする．

また，来学期の新型ウイルスの感染状況については，急激に拡大している状況 (感染状況 x と呼ぶことにする)，ピークは過ぎたが十分な収束にはいたっていない状況 (感染状況 y と呼ぶことにする)，ある程度収束した状況 (感染状況 z と呼ぶことにする) の 3 つが考えられるとする．

いま，この大学は授業形式と新型ウイルスの感染状況の組み合わせについて，次の表に示す評価値 (値が高いほど評価も高い) を定めているものとする．

	感染状況 x	感染状況 y	感染状況 z
授業形式 u	0	2	5
授業形式 v	3	0	0
授業形式 w	3	2	2

来学期の感染状況について，感染状況 x である確率を p_x，感染状況 y である確率を p_y，感染状況 z である確率を p_z とすると，xyz 空間において点 $p=(p_x,p_y,p_z)$ は $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ を頂点とする正三角形上の点として表すことができる．この正三角形上において，点 p から各辺に垂線を下ろしたとき，$(1,0,0)$ と向かいの辺に下ろした垂線の長さを l_x，$(0,1,0)$ と向かいの辺に下ろした垂線の長さを l_y，$(0,0,1)$ と向かいの辺に下ろした垂線の長さを l_z とする．



(1) このとき

$$p_x = \frac{\sqrt{\boxed{(123)}\boxed{(124)}}}{\boxed{(125)}\boxed{(126)}}\, l_x, \qquad p_y = \frac{\sqrt{\boxed{(123)}\boxed{(124)}}}{\boxed{(125)}\boxed{(126)}}\, l_y, \qquad p_z = \frac{\sqrt{\boxed{(123)}\boxed{(124)}}}{\boxed{(125)}\boxed{(126)}}\, l_z$$

が成り立つ．

いま，正三角形上の点 $p = (p_x, p_y, p_z)$ に対して，上記の評価の期待値を最大にする授業形式のラベルをつけることにする．ただし，p によっては評価値を最大にする選択が複数ある場合もあり，その場合には p に複数のラベルをつけることにする．

さらに，原点と $(0,1,0)$，$(0,0,1)$ を頂点とする yz 平面上の直角二等辺三角形の頂点，辺，内部からなるすべての点に x という感染状況のラベルをつけ，原点と $(1,0,0)$，$(0,0,1)$ を頂点とする xz 平面上の直角二等辺三角形の頂点，辺，内部からなるすべての点に y という感染状況のラベルをつけ，原点と $(1,0,0)$，$(0,1,0)$ を頂点とする xy 平面上の直角二等辺三角形の頂点，辺，内部からなるすべての点に z という感染状況のラベルをつけることにする．

すると，正三角形と 3 つの直角二等辺三角形からなる四面体の面上 (頂点，辺も含む) のそれぞれの点には，1 つもしくは複数のラベルがつくことになる．例えば，原点には $\{\, x,\ y,\ z \,\}$ の 3 つのラベルがつく．

(2) このとき，正三角形の面上 (頂点，辺も含む) の各点 p につけられるラベルの可能性を列挙すると，以下の通りとなる．ただし，複数のラベルがつけられる場合には，それぞれの中括弧内では，アルファベット順に書くものとする． $\boxed{(127)}$ ～ $\boxed{(143)}$ に入るラベルについて下記の選択肢から選びなさい．

単一のラベルがつく場合: $\{\ \boxed{(127)}\ \}$, $\{\ w\ \}$

2 つのラベルがつく場合: $\{\ \boxed{(128)},\ w\ \}$, $\{\ u,\ \boxed{(129)}\ \}$, $\{\ \boxed{(130)},\ y\ \}$, $\{\ w,\ y\ \}$, $\{\ \boxed{(131)},\ z\ \}$

3 つのラベルがつく場合: $\{\ \boxed{(132)},\ w,\ \boxed{(133)}\ \}$, $\{\ \boxed{(134)},\ \boxed{(135)},\ \boxed{(136)}\ \}$

4 つのラベルがつく場合: $\{\ u,\ \boxed{(137)},\ \boxed{(138)},\ \boxed{(139)}\ \}$, $\{\ \boxed{(140)},\ \boxed{(141)},\ \boxed{(142)},\ \boxed{(143)}\ \}$

選択肢: (1) u (2) v (3) w (4) x (5) y (6) z